Serie geometrica

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1 + h + h^2 + h^3 + \ldots\ldots + h^n + \ldots..$$

è detta **serie geometrica** di ragione h.

Vediamo quando tale serie è convergente.

Ricordiamo, innanzi tutto, dalla scomposizione in fattori che:

$$(1-h^n) = (1-h)\ (1+h+ h^2+\ldots\ldots+h^{n-1})$$

Per vedere se la serie converge, dobbiamo verificare che la successione delle somme parziali converge, ovvero che il $\lim_{n\to\infty} s_n$ è convergente.

Consideriamo, quindi, il termine generale della successione delle somme parziali, ovvero consideriamo la somma dei primi n termini:

$$s_n=(1+h+h^2+\ldots\ldots+h^{n-1})$$

Moltiplichiamo e dividiamo per *(1-h)*, si ha:

$$s_n = (1 + h + h^2 + \ldots\ldots + h^{n-1}) = (1 + h + h^2 + \ldots\ldots + h^{n-1})\frac{(1-h)}{(1-h)}$$

ma abbiamo ricordato che $(1-h^n) = (1-h)\ (1+h+ h^2+\ldots\ldots+h^{n-1})$, allora:

$$s_n = \frac{(1-h^n)}{(1-h)}.$$

Andiamo a valutare il limite $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-h^n)}{(1-h)}$

- Se $|h|<1$ $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-h^n)}{(1-h)} = \frac{1}{1-h}$

  Quindi la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} h^n$ è convergente se $|h|<1$ e la sua somma è $S = \frac{1}{1-h}$.

- Se $|h|>1$ $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-h^n)}{(1-h)} = +\infty$

  Quindi la serie, in questo caso diverge.

- Se h=1 $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1+1+1^2+\ldots\ldots+1^n) = +\infty$ e dunque la serie geometrica diverge

- Se h=-1 $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1-1+1 \ -1+\ldots\ldots+1^n) = \begin{cases} 0 & \text{Se n è pari} \\ 1 & \text{Se n è dispari} \end{cases}$

  Dunque in questo caso la serie è non regolare.

Esempio1

Dire se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è regolare ed eventualmente determinare la sua somma.

Essendo questa una serie geometrica di ragione h=1/2 <1 tale serie è convergente e la sua somma è

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Osserviamo che:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ la serie manca del primo termine pertanto la sua somma vale 1 (S-1).

Se $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ la serie manca di tre termini, 1, 1/2,1/4, pertanto la somma vale ¼ (S-1-1/2-1/4)

Esempio2

Dire se la serie

è regolare ed eventualmente determinare la sua somma.

Essendo 3/5 la serie è convergente e la somma è data da:

Esempio 3

Dire se la serie

è regolare ed eventualmente determinare la sua somma.

La serie si può scrivere:

Essendo 2/3 la serie è convergente e la somma è data da:

Esempio 4

Dire se la serie

è regolare ed eventualmente determinare la sua somma.

La serie data si può scrivere:

Essa è una serie geometrica di ragione − , pertanto è convergente e la somma è:

Esempio 5

Dire se la serie

è regolare ed eventualmente determinare la sua somma.

Esso si può scrivere:

La ragione è: −<1 pertanto è convergente e la somma è: